



ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO DE INCLUSIONES ESFÉRICAS EN UN CILINDRO BAJO TRACCIÓN

ON THE BEHAVIOUR OF SPHERICAL INCLUSIONS IN A CYLINDER UNDER TENSION LOADS

Sebastián Montero¹, Roger Bustamante^{1,*}, Alejandro Ortiz-Bernardin¹

Resumen

En el presente artículo se estudia el comportamiento de un sólido hiperelástico con una, dos y más inclusiones esféricas, bajo el efecto de una carga externa de tracción. Las inclusiones se modelan como sólidos elásticos con comportamiento no-lineal y que presentan pequeñas deformaciones, usando un nuevo modelo propuesto recientemente en la literatura, en donde las deformaciones (caso infinitesimal) se expresan como funciones no-lineales de las tensiones. En particular, se consideran expresiones para dichas funciones que aseguran que las deformaciones están limitadas en cuanto a su magnitud independientemente de la magnitud de las cargas externas. Como una forma de simplificar el problema, el medio hiperelástico y las inclusiones se modelan como sólidos axil-simétricos. El método de elementos finitos es usado para obtener resultados para estos problemas de valor de frontera. El objetivo del uso de los nuevos modelos para cuerpos elásticos para el caso de las inclusiones, es estudiar el comportamiento de dichos cuerpos en el caso de concentración de tensiones, lo cual ocurre cerca de la zona de interface con la matriz. De los resultados mostrados en este trabajo, es posible apreciar que a pesar de los valores relativamente altos para las tensiones, las deformaciones se mantienen pequeñas, lo cual sería mucho más cercano al comportamiento esperado en la realidad, cuando se trabaja con inclusiones hechas de un material frágil, el cual no puede mostrar grandes deformaciones.

Palabras clave: elasticidad no-lineal, límite para las deformaciones, método de elementos finitos, ecuaciones constitutivas, cuerpos elásticos, cuerpos isotrópicos.

Abstract

In the present paper the behaviour of a hyperelastic body is studied, considering the presence of one, two and more spherical inclusions, under the effect of an external tension load. The inclusions are modelled as nonlinear elastic bodies that undergo small strains. For the material constitutive relation, a relatively new type of model is used, wherein the strains (linearized strain) are assumed to be nonlinear functions of the stresses. In particular, a function is used that keeps the strains small, independently of the magnitude of the external loads. In order to simplify the problem, the hyperelastic medium and the inclusions are modelled as axial-symmetric bodies. The finite element method is used to obtain results for these boundary value problems. The objective of using these new models for elastic bodies in the case of the inclusions is to study the behaviour of such bodies in the case of concentration of stresses, which happens near the interface with the surrounding matrix. From the results presented in this paper, it is possible to observe that despite the relatively large magnitude for the stresses, the strains for the inclusions remain small, which would be closer to the actual behaviour of real inclusions made of brittle materials, which cannot show large strains.

Keywords: Nonlinear elasticity, Strain limiting behaviour, Finite element method, Constitutive equations, Elastic bodies, Isotropic bodies

^{1,*}Departamento de Ingeniería Mecánica, Universidad de Chile – Chile. Autor para correspondencia ✉: rogbusta@ing.uchile.cl. <https://orcid.org/0000-0002-2402-6139>, <https://orcid.org/0000-0002-1072-1042>
<https://orcid.org/0000-0001-9221-2470>

Recibido: 10-10-2017, aprobado tras revisión: 19-12-2017

Forma sugerida de citación: Montero, S.; Bustamante, R. y Ortiz-Bernardin, A. (2018). «Estudio del comportamiento de inclusiones esféricas en un cilindro bajo tracción». INGENIUS. N.º 19, (enero-junio). pp. 69-78. DOI: <https://doi.org/10.17163/ings.n19.2018.07>.

1. Introduction

En las referencias [1–3] Rajagopal y colaboradores han propuesto algunos tipos nuevos de relaciones constitutivas, que no pueden clasificarse como ecuaciones elásticas de Green o Cauchy. Si \mathbf{T} y \mathbf{B} se utilizan para denotar el tensor tensión de Cauchy y el tensor Cauchy-Green izquierdo, respectivamente, una de esas relaciones es $\mathbf{f}(\mathbf{T}, \mathbf{B}) = \mathbf{0}$, y dos casos especiales que pueden obtenerse de la relación implícita anterior son la ecuación constitutiva no lineal clásica para un cuerpo elástico de Cauchy [4] $\mathbf{T} = \mathbf{g}(\mathbf{B})$, y la subclase $\mathbf{B} = \mathbf{h}(\mathbf{T})$ (ver, por ejemplo, la referencia [5]).

Como un caso particular, suponemos que el gradiente del campo de desplazamiento es pequeño. De la ecuación anterior $\mathbf{B} = \mathbf{h}(\mathbf{T})$, obtenemos $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\mathbf{T})$, donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ es el tensor de deformación linealizado. Esta última ecuación constitutiva es muy importante por sí misma, ya que podría usarse para modelar el comportamiento de algunos materiales que pueden mostrar un comportamiento no lineal, pero donde las deformaciones son pequeñas, como la roca [6, 7], el hormigón [8] y algunas aleaciones de metales [9]. Otro uso importante de $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\mathbf{T})$ es en el análisis de mecánica de fractura de cuerpos quebradizos [10], donde para algunas expresiones particulares para $\mathbf{g}(\mathbf{T})$, se puede demostrar que, para una grieta en un cuerpo frágil, la magnitud de las deformaciones es limitada y no va al infinito cerca de la punta de una grieta, al contrario de lo que sucede cuando se usa la teoría elástica linealizada clásica (véase, por ejemplo, la referencia [11]). Es muy importante estudiar el comportamiento de los cuerpos elásticos considerando $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\mathbf{T})$ para tantos problemas diferentes de valores límite como sea posible, a fin de comprender las capacidades y desventajas de estos nuevos modelos constitutivos, y ese es el objetivo principal de la comunicación actual.

El interés radica en estudiar el comportamiento de una muestra cilíndrica hiper elástica (sólido de Green) que puede contener 1, 2 y 5 inclusiones esféricas, que están ubicadas en una fila en el eje central del cilindro, y que están equitativamente separadas una de la otra. Se asume que las inclusiones se comportan como sólidos elásticos no lineales, utilizando la nueva ecuación constitutiva $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\mathbf{T})$ mencionada anteriormente¹. Para simplificar, la muestra compuesta se modela como un cuerpo axialmente simétrico y se aplica una carga de tensión en la parte superior del cilindro. El método de elementos finitos se usa para obtener resultados para el problema del valor límite. Estamos particularmente interesados en estudiar el comportamiento de las tensiones y deformaciones cerca de la interfaz de las inclusiones y el cuerpo hiperelástico circundante. Se asume que las inclusiones esféricas están perfectamente unidas a la matriz hiper elástica. La hipótesis

de nuestro trabajo es que las nuevas clases de ecuaciones constitutivas $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\mathbf{T})$ pueden ser útiles para el modelado de cuerpos frágiles, en particular en el caso de que tengamos grandes tensiones, pero donde las deformaciones deben permanecer pequeñas. Para una muestra cilíndrica con inclusiones, tal concentración de tensiones aparece cerca de la interfaz de la matriz y la inclusión, y como se muestra en el presente trabajo, considerando una expresión particular para $\mathbf{g}(\mathbf{T})$, que de hecho obtenemos pequeñas deformaciones para las inclusiones esféricas. Para el modelado de tales materiales compuestos es muy importante obtener resultados lo más precisos posible de las tensiones cerca de la interfaz, ya que la falla más común de dichos compuestos corresponde al despegamiento de las partículas de la matriz circundante.

Este trabajo está estructurado en las siguientes secciones. La Sección 2 presenta las ecuaciones básicas para los modelos, en particular, las ecuaciones constitutivas usadas para las inclusiones esféricas. La sección 3 proporciona detalles sobre los modelos a analizar. La Sección 4 presenta algunos resultados numéricos para los diferentes casos analizados. Finalmente, la sección 5 concluye con algunas observaciones finales sobre los resultados numéricos presentados en este artículo.

2. Ecuaciones básicas

2.1. Cinemática y ecuación de movimiento

La X denomina un punto de un cuerpo \mathcal{B} , la referencia y las configuraciones actuales se denominan como \mathcal{B}_r y \mathcal{B}_t , respectivamente, y la posición del punto X en tales configuraciones se denomina \mathbf{X} y \mathbf{x} , respectivamente. Se asume que hay un mapeo de uno a uno a un $\boldsymbol{\chi}$ tal que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$, donde t es el tiempo. El gradiente de deformación \mathbf{F} , los tensores Cauchy-Green izquierdo y derecho \mathbf{B} , \mathbf{C} , respectivamente, el tensor de tensión Green Saint-Venant \mathbf{E} , el campo de desplazamiento \mathbf{u} el tensor de de tensión linealizado $\boldsymbol{\varepsilon}$ se definen como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T, \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T). \quad (3)$$

Respectivamente, donde ∇ es el operador de gradiente con respecto a la configuración de referencia. Suponemos $0 < J < \infty$, donde $J = \det \mathbf{F}$.

La ecuación del movimiento es

$$\rho \ddot{\mathbf{x}} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \mathbf{b}, \quad (4)$$

¹Ver la referencia [12] para un trabajo reciente sobre el modelado de compuestos considerando una extensión de nuevas ecuaciones constitutivas $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\mathbf{T})$ para deformaciones viscoelásticas.

donde ρ es la densidad del cuerpo en la configuración actual, \mathbf{T} es el tensor de tensión de Cauchy, \mathbf{b} representa las fuerzas del cuerpo en la configuración actual, $(\dot{})$ es la segunda derivada en el tiempo y div es el operador de divergencia definido en la corriente configuración.

En esta investigación se consideran deformaciones cuasiestáticas, por lo tanto, el lado izquierdo de (4) es cero. Se puede encontrar más detalles sobre las relaciones anteriores, por ejemplo, en referencia [13].

2.2. Ecuaciones constitutivas

Consideramos un cuerpo compuesto por dos materiales, una matriz que se supone hiper-elástica, llena de inclusiones esféricas que se supone se comportan como cuerpos elásticos no lineales sometidos a pequeñas deformaciones. Para el cilindro de matriz hiper elástica, suponemos que existe una función $W = W(\mathbf{F})$, llamada función de energía, de modo que (véase, por ejemplo, referencia [4])

$$\mathbf{T} = J^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}, \quad (5)$$

Donde se usa la convención $(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}})_{\alpha i} = \frac{\partial W}{\partial F_{i\alpha}}$. En este trabajo, se utilizó modelo compresible neo-Hookean

$$W = \frac{\mu}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{\kappa}{2} (J - 1)^2, \quad (6)$$

Donde $\bar{I}_1 = J^{-1/3} I_1$, $I_1 = \text{tr}(\mathbf{C})$, donde tr es el rastro de un tensor de segundo orden, y μ , κ son constantes materiales.

Para las inclusiones, suponemos que son cuerpos elásticos que desarrollan un comportamiento no lineal cuando las deformaciones son pequeñas. Como se indicó en la introducción, recientemente se han propuesto algunos tipos nuevos de relaciones constitutivas para cuerpos elásticos en la literatura [1–3]. Una de tales relaciones es de la forma

$$\mathbf{f}(\mathbf{T}, \mathbf{B}) = \mathbf{0}, \quad (7)$$

donde el cuerpo elástico de Cauchy $\mathbf{T} = \mathbf{g}(\mathbf{B})$ es una subclase especial de la relación anterior, más la nueva ecuación constitutiva

$$\mathbf{B} = \mathbf{h}(\mathbf{T}). \quad (8)$$

Asumiendo que $|\nabla \mathbf{u}| \sim O(\delta)$ donde $\delta \ll 1$, entonces $\mathbf{B} \approx 2\boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{I}$ (también se tiene que $\mathbf{E} \approx \boldsymbol{\varepsilon}$), y de (8) se obtiene (ver, por ejemplo, las referencias. [14, 15])

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\mathbf{T}), \quad (9)$$

donde, en general, $\mathbf{g}(\mathbf{T})$ es una función no lineal del tensor de tensión. Consideramos un caso especial de

(9), donde suponemos que existe una función escalar $\Pi = \Pi(\mathbf{T})$ tal que (ver la referencia [16])

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{g}(\mathbf{T}) = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{T}}. \quad (10)$$

Si se supone que Π es una función isotrópica, se tiene que $\Pi(\mathbf{T}) = \Pi(J_1, J_2, J_3)$, donde J_i , $i = 1, 2, 3$ son el siguiente conjunto de invariantes del tensor de tensión

$$J_1 = \text{tr} \mathbf{T}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{T}^2), \quad J_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\mathbf{T}^3). \quad (11)$$

Y a partir de (10), obtenemos la representación

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \Pi_1 \mathbf{I} + \Pi_2 \mathbf{T} + \Pi_3 \mathbf{T}^2, \quad (12)$$

Donde $\Pi_i = \frac{\partial \Pi}{\partial J_i}$, $i = 1, 2, 3$.

Se considera la siguiente expresión particular para Π :

$$\Pi(J_1, J_2) = -\frac{\alpha}{\beta} \ln[\cosh(\beta J_1)] + \frac{\gamma}{\iota} \sqrt{1 + 2\iota J_2}, \quad (13)$$

donde α , β , γ y ι son constantes.

La ecuación (13) ha sido utilizada en [17] para estudiar problemas donde, independientemente de la magnitud de las tensiones, las deformaciones siguen siendo pequeñas. Es necesario señalar que esta forma para Π y los valores numéricos de la constante que se muestran en la Tabla 1, no se han obtenido a partir de datos experimentales. En las Figuras 1, 2 presentadas en [17], se muestran algunos gráficos para el comportamiento de un cilindro bajo tensión, donde es posible observar que las deformaciones permanecen siempre pequeñas independientemente de la magnitud de las tensiones. Como se indicó en la sección de introducción, tales expresiones particulares podrían ser importantes para el análisis de fracturas de cuerpos quebradizos.

Finalmente, en la Tabla 1 se presentan los valores numéricos de las constantes utilizadas en (6) y (13).

Tabla 1. Valores para las constantes usadas en (6) y (13).

α	β	γ	ι	μ	κ
	1/Pa	1/Pa	1/Pa ²	Pa	Pa
0.01	9.277×10^{-8}	4.020×10^{-9}	10^{-14}	80.194×10^6	150×10^6

2.3. Problemas de valor límite

Para el cilindro hiper elástico, el problema del valor límite es la formulación clásica en elasticidad no lineal, donde la función $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X})$ se encuentra al resolver la ecuación de equilibrio en la configuración de referencia (ver, por ejemplo [4])²:

$$\text{Div} \mathbf{S} = \mathbf{0}, \quad (14)$$

²En este trabajo no consideramos el efecto de las fuerzas en el cuerpo.

donde $\mathbf{S} = J^{-1}\mathbf{F}\mathbf{T}$ es el esfuerzo nominal de tensión. De (5), $\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}}$, y Div es el operador de divergencia con respecto a la configuración de referencia. Eq. (14) debe ser resuelto usando las condiciones de contorno.

$$\mathbf{S}^T \mathbf{N} = \hat{\mathbf{s}} \quad \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_r^s, \quad \boldsymbol{\chi} = \hat{\boldsymbol{\chi}} \quad \mathbf{X} \in \partial \mathcal{B}_r^x, \quad (15)$$

donde $\partial \mathcal{B}_r$ es el límite del cuerpo hiper elástico en la configuración de referencia, $\partial \mathcal{B}_r^s \cup \partial \mathcal{B}_r^x = \partial \mathcal{B}_r$, $\partial \mathcal{B}_r^s \cap \partial \mathcal{B}_r^x = \emptyset$, \mathbf{N} es el vector externo hacia la superficie del cuerpo en la configuración de referencia, $\hat{\mathbf{s}}$ es la tracción externa (descrita en la configuración de referencia), y $\hat{\boldsymbol{\chi}}$ es un campo de deformación conocido en alguna parte de la superficie del cuerpo hiperelástico.

Para las inclusiones, consideramos pequeñas deformaciones y desplazamientos. Y siguiendo lo que se ha presentado en [16, 17], para el problema del valor límite corresponde para encontrar \mathbf{T} y \mathbf{u} resolviendo (ver (3), (4) y (10)).

$$\text{div} \mathbf{T} = \mathbf{0}, \quad \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{T}} \quad (16)$$

simultáneamente. En el sistema anterior se tiene 9 ecuaciones para un problema completamente en 3D, y 9 incógnitas que corresponden a las componentes del tensor de tensión y el campo de desplazamiento. En cuanto a las condiciones de frontera se tiene en general

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}} \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{B}_t^t, \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} \quad \mathbf{x} \in \partial \mathcal{B}_t^u, \quad (17)$$

donde $\partial \mathcal{B}_t$ es la superficie de la inclusión y $\mathbf{x} \in \partial \mathcal{B}_t^t \cup \partial \mathcal{B}_t^u = \partial \mathcal{B}_t$, $\partial \mathcal{B}_t^t \cap \partial \mathcal{B}_t^u = \emptyset$, \mathbf{n} es el vector normal a la superficie de la inclusión, $\hat{\mathbf{t}}$ es la carga externa y $\hat{\mathbf{u}}$ es un campo de desplazamiento conocido en una parte de la superficie de la inclusión. Dado que para la inclusión asumimos que $|\nabla \mathbf{u}| \sim O(\delta)$ donde $\delta \ll 1$ entonces no hay necesidad de distinguir entre la referencia y la configuración actual para ese cuerpo.

3. Modelos axiales-simétricos

Para simplificar, se considera que la matriz hiper elástica es un cilindro de radio R y longitud L (véase, por ejemplo, la Figura 1).

Para un cilindro con una inclusión, se asume que la inclusión se encuentra en el centro del cilindro, y que el radio de ese cuerpo esférico es r_i (ver Figura 1). Se asume que hay simetría axial, por lo tanto, estudiamos un problema plano utilizando las coordenadas r y z (eje radial y axial, respectivamente).

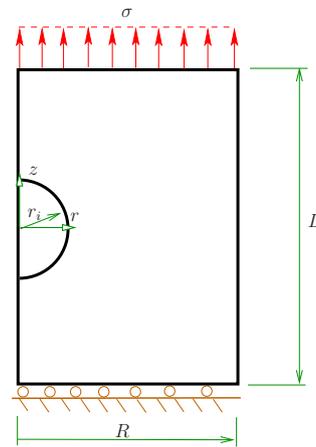


Figura 1. Cilindro hiperelástico con una inclusión.

El centro de la esfera se encuentra en $z = L/2$. En la superficie $z = L$ se aplica una carga axial uniforme σ . En la superficie $z = 0$ suponemos que el cilindro no puede moverse en la dirección axial, pero es libre de expandirse en la dirección radial, es decir, $u_z(r, 0) = 0$. En la superficie $r = R$ se asume que el cilindro está libre. Finalmente, se asume que la inclusión esférica está perfectamente ligada al cilindro hiperelástico circundante, es decir, el campo de desplazamiento es continuo a través de la superficie de la inclusión.

En la Figura 2, se representa un cilindro hiper elástico con dos inclusiones.

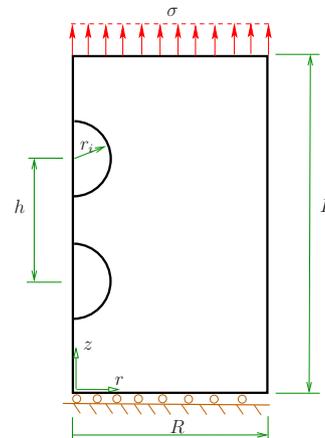
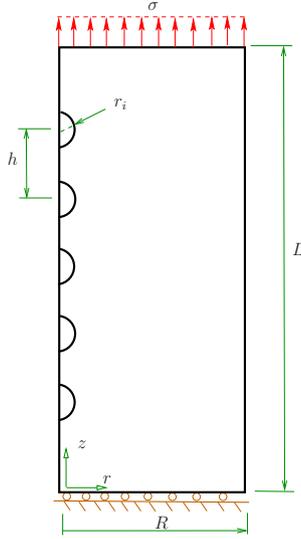


Figura 2. Cilindro hiperelástico con dos inclusiones.

Estas dos inclusiones son del mismo radio, están separadas por una distancia h entre centros (el punto central entre ellas se encuentra en el centro del cilindro en la línea axial que lo define). Se asume que ambas inclusiones se comportan como cuerpos elásticos no lineales usando (10). El resto de las condiciones de contorno para el problema son las mismas que el problema presentado en la Figura 1.

En la Figura 3, se presenta el caso de un cilindro hiperelástico con cinco inclusiones seguidas.


Figura 3. Cilindro hiperelástico con cinco inclusiones

Las inclusiones están separadas entre sí por la misma distancia h . Como en el caso anterior, se modelan usando (10), y el punto central para todas las inclusiones se ubica en el centro del cilindro.

Para los diferentes modelos mencionados anteriormente, se asumió que $r_i = 1$ mm. Con respecto a R , L y h , se consideraron diferentes casos como se indica en las Tablas 2-4.

Tabla 2. Casos estudiados para el cilindro con una inclusión.

R	$2r_i$	$3r_i$	$4r_i$	$5r_i$
L	$6r_i$	$8r_i$	$10r_i$	

Para el caso de un cilindro con dos inclusiones, asumimos que $R = 5r_i$ y $L = 10r_i$ (el parámetro h se presenta en la Tabla 3.)

Tabla 3. Cases studied for the cylinder with two inclusions.

h	$2.1r_i$	$2.2r_i$	$2.3r_i$	$2.4r_i$	$2.5r_i$	$3r_i$	$4r_i$	$5r_i$

Finalmente, para el caso de un cilindro con cinco inclusiones, asumimos que $R = 5r_i$ and $L = 4(h + r_i)$, y para h se tiene los casos presentados en la Tabla 4.

Tabla 4. Casos estudiados para el cilindro con cinco inclusiones.

h	$2.1r_i$	$2.2r_i$	$2.3r_i$	$2.4r_i$	$2.5r_i$	$3r_i$	$4r_i$	$5r_i$	$6r_i$	$7r_i$

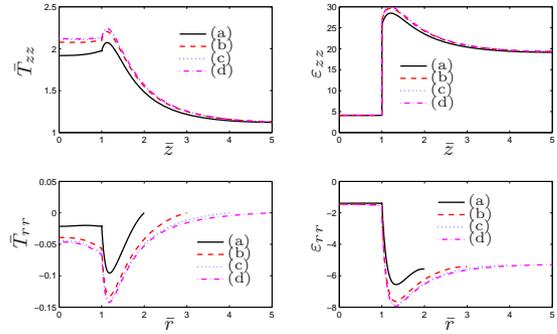
Los problemas del valor límite se resolvieron usando el método de elementos finitos con un código de elemento finito interno (se pueden encontrar detalles del método en el que se basa el código, por ejemplo, [16].)

4. Resultados numéricos

4.1. Resultados para una inclusión

En esta sección mostramos algunos resultados para un cilindro con una inclusión esférica ubicada en su centro (ver Figura 1), para los casos indicados en la Tabla 2.

En la Figura 4, se presentan los resultados para los componentes axiales y radiales del esfuerzo normalizado y los componentes de la deformación, para diferentes valores de R , para el caso $L = 10r_i$.


Figura 4. Resultados para los componentes normalizados de la tensión \bar{T}_{zz} and deformación $\bar{\epsilon}_{zz}$, para la línea $r = 0$, $0 \leq \bar{z} \leq \bar{L}/2$, y el componente \bar{T}_{rr} de la tensión y $\bar{\epsilon}_{rr}$ del esfuerzo, para la línea $z = 0$, $0 \leq \bar{r} \leq \bar{R}$. Esto es para el caso $L = 10r_i$, donde: (a) $R = 2r_i$ (b) $R = 3r_i$ (c) $R = 4r_i$ (d) $R = 5r_i$.

Los componentes normalizados de tensión que aparecen en la Figura 4 se definen como

$$\bar{T}_{zz} = \frac{T_{zz}}{\sigma}, \quad \bar{T}_{rr} = \frac{T_{rr}}{\sigma}, \quad (18)$$

Donde σ es la carga uniforme aplicada en la superficie superior del cilindro (ver Figura 1). Las deformaciones están en %.

Los resultados para los componentes axiales de la tensión y las deformaciones normalizados \bar{T}_{zz} and $\bar{\epsilon}_{zz}$ presentados en la Figura 4, respectivamente, se muestran para la línea $r = 0$, $0 \leq \bar{z} \leq \bar{L}/2$, donde

$$\bar{z} = \frac{z}{r_i}, \quad \bar{L} = \frac{L}{r_i}. \quad (19)$$

Los resultados para los componentes radiales de la tensión y deformaciones normalizados \bar{T}_{rr} y $\bar{\epsilon}_{rr}$ presentados en la Figura 4, respectivamente, se muestran para la línea $z = 0$, $0 \leq \bar{r} \leq \bar{R}$, donde

$$\bar{r} = \frac{r}{r_i}, \quad \bar{R} = \frac{R}{r_i}. \quad (20)$$

En la Figura 5, se muestran resultados similares a los de la Figura 4, para $R = 5r_i$ y diferentes casos para L .

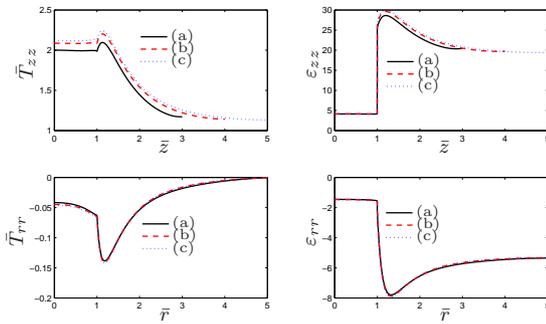


Figura 5. Resultados para los componentes normalizados de la tensión \bar{T}_{zz} y deformación ε_{zz} , para la línea $r = 0$, $0 \leq \bar{z} \leq \bar{L}$, y el componente \bar{T}_{rr} de la tensión and ε_{rr} de la deformación, para la línea $z = 0$, $0 \leq \bar{r} \leq \bar{R}$. Esto es para el caso $R = 5r_i$, donde (a) $L = 6r_i$ (b) $L = 8r_i$ (c) $L = 10r_i$.

Los resultados para \bar{T}_{zz} y ε_{zz} se muestran para la línea $r = 0$, $0 \leq \bar{z} \leq \bar{L}$ mientras que para \bar{T}_{rr} y ε_{rr} los resultados se muestran para la línea $z = 0$, $0 \leq \bar{r} \leq \bar{R}$.

En las Figuras 4 y 5 la inclusión se ubica en la región $\bar{r} \leq 1$, $\bar{z} \leq 1$ y debido a la simetría del problema, solo se considera la mitad superior de la inclusión y el cilindro (ver Figura 1).

En las Figuras 6-9 se muestran los resultados de los componentes radiales y axiales de la deformación y la tensión, para el caso $R = 5r_i$, $L = 10r_i$. Las tensiones se presentan en Pa.

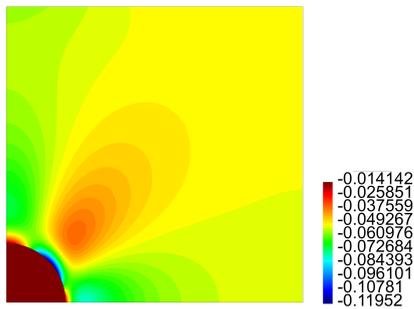


Figura 6. Diagrama de contorno para ε_{rr} para el problema de una inclusión.

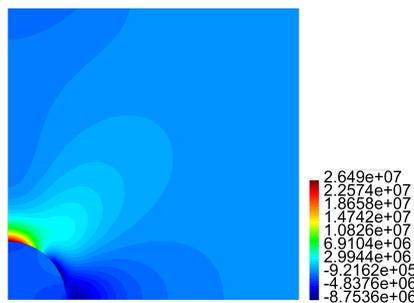


Figura 7. Diagrama de contorno para T_{rr} en Pa para el problema de una inclusión.

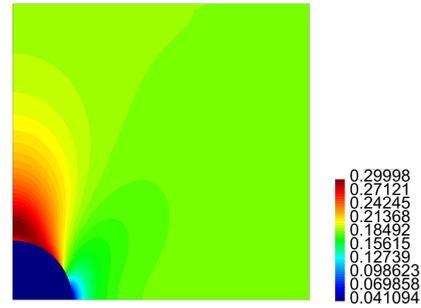


Figura 8. Diagrama de contorno para ε_{zz} para el problema de una inclusión.

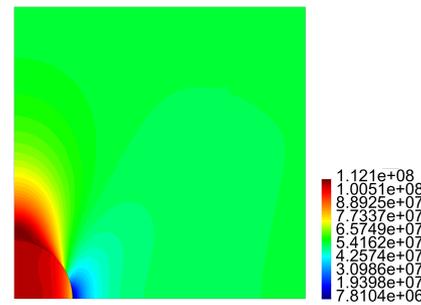


Figura 9. Diagrama de contorno para T_{zz} en Pa para el problema de una inclusión.

4.2. Resultados para dos inclusiones

La Figura 10 representa los resultados de los componentes axiales y radiales de la tensión (tensiones normalizadas, véase (18)) y la deformación, para la línea $r = 0$, $0 \leq \bar{z} \leq \bar{L}$ para diferentes valores de h como se presenta en la Tabla 3 en un cilindro hipere-lástico con dos inclusiones (ver Figura 2).

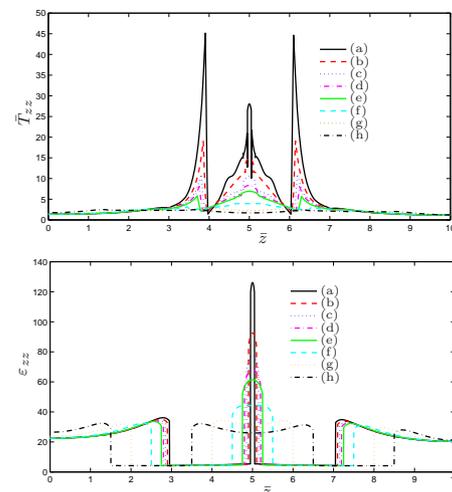


Figura 10. Resultados para los componentes normalizados de la tensión \bar{T}_{zz} y deformación ε_{zz} , para la línea $r = 0$, $0 \leq \bar{z} \leq \bar{L}$, donde (a) $h = 2.1r_i$ (b) $h = 2.2r_i$ (c) $h = 2.3r_i$ (d) $h = 2.4r_i$ (e) $h = 2.5r_i$ (f) $h = 3r_i$ (g) $h = 4r_i$ (h) $h = 5r_i$.

En las Figuras 11-14 presentamos resultados para los componentes radiales y axiales de la tensión y la deformación, para el caso $h = 2.5 r_i$ (las tensiones están en Pa.)

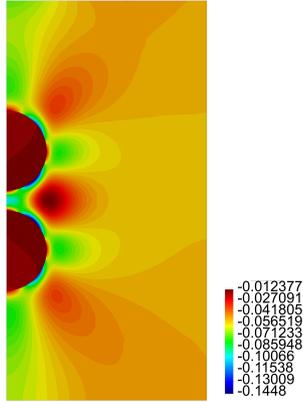


Figura 11. Diagrama de contorno para ε_{rr} para el problema de dos inclusiones.

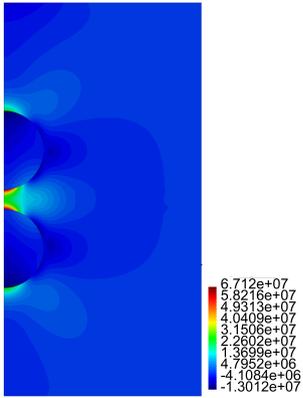


Figura 12. Diagrama de contorno para T_{rr} en Pa para el problema de dos inclusiones.

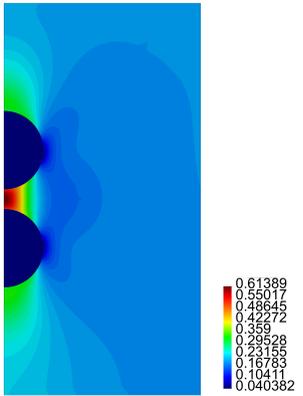


Figura 13. Diagrama de contorno para ε_{zz} para el problema de dos inclusiones.

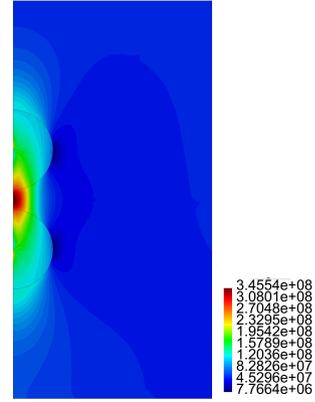


Figura 14. Diagrama de contorno para T_{zz} en Pa para el problema de dos inclusiones.

4.3. Resultados para cinco inclusiones

La Figura 15 presenta los resultados de los componentes axiales y radiales de la tensión (tensiones normalizadas, véase (18)) y la deformación, para la línea $r = 0$, $0 \leq \bar{z} \leq \bar{L}$ en un cilindro hiperelástico con cinco inclusiones (ver Figura 3).

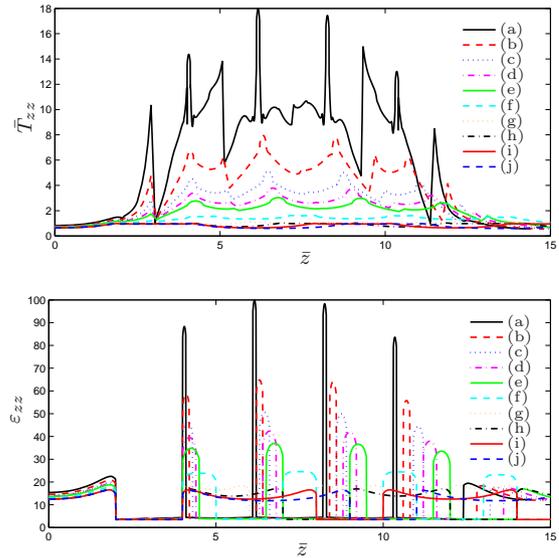


Figura 15. Resultados para los componentes normalizados de la tensión \bar{T}_{zz} y deformación ε_{zz} , para la línea $r = 0$, $0 \leq \bar{z} \leq \bar{L}$, donde (a) $h = 2.1 r_i$ (b) $h = 2.2 r_i$ (c) $h = 2.3 r_i$ (d) $h = 2.4 r_i$ (e) $h = 2.5 r_i$ (f) $h = 3 r_i$ (g) $h = 4 r_i$ (h) $h = 5 r_i$ (i) $h = 6 r_i$ (j) $h = 7 r_i$.

Las Figuras 16-19 presentan los resultados de los componentes radiales y axiales de la deformación y la tensión, para el caso $h = 2.5 r_i$ (las tensiones están en Pa.)

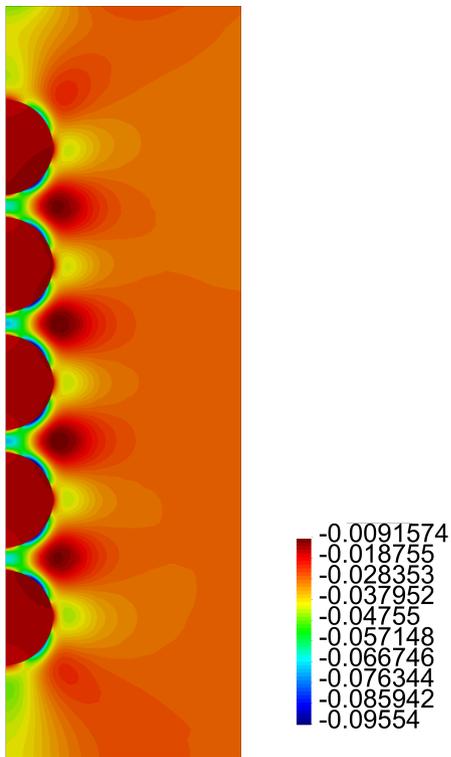


Figura 16. Diagrama de contorno para ε_{rr} para el problema de cinco inclusiones.

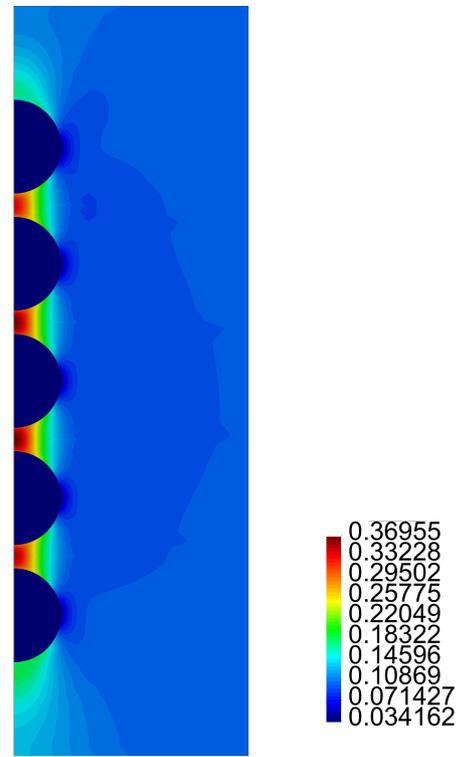


Figura 18. Diagrama de contorno para ε_{zz} para el problema de cinco inclusiones.

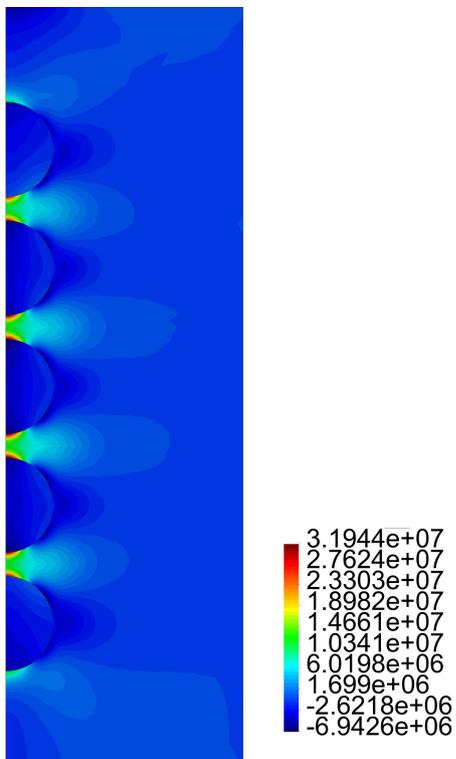


Figura 17. Diagrama de contorno para T_{rr} en Pa para el problema de cinco inclusiones.

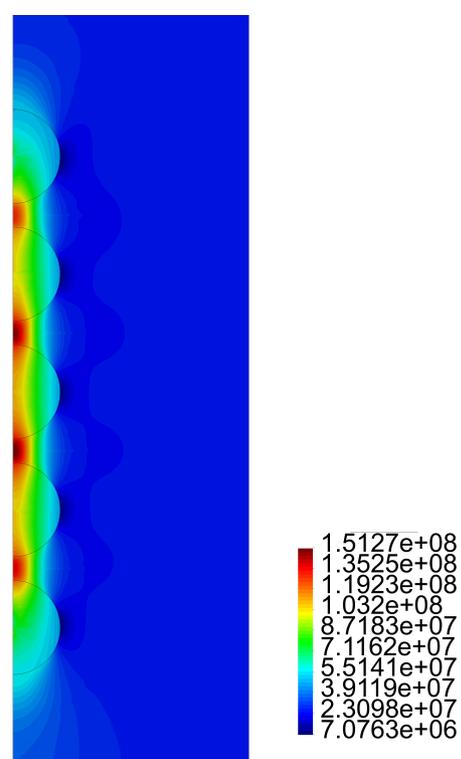


Figura 19. Diagrama de contorno para T_{zz} en Pa para el problema de cinco inclusiones.

4.4. Discusión de los resultados

Para la matriz con una partícula, de la Figura 4 casos (c) y (d), se observa que no hay diferencia significativa entre el comportamiento de la tensión y la deformación, es decir, como se espera para R lo suficientemente grande, los resultados tienden a no variar con respecto al tamaño del cilindro. Para los resultados presentados en la Figura 5, como en el caso anterior, para L lo suficientemente grande, no hay mucha diferencia en el comportamiento del cuerpo. De las Figuras 4 y 5, observamos que el componente de tensión es continuo a través de la superficie de la inclusión, pero los componentes de las deformaciones no lo son. En ambos casos, se reconoce la presencia de grandes tensiones en el material de la matriz cerca de la interfaz con la inclusión, y para T_{zz} tales tensiones son positivas, lo que eventualmente podría conducir al despegue del compuesto. De hecho, en la Figura 7 reconocemos que hay una zona en la parte superior de la inclusión esférica (en la matriz), donde la tensión radial T_{rr} es positiva, y ese efecto es mucho más fuerte en la misma zona para T_{zz} (vease la Figura 9).

Para el cilindro con dos inclusiones esféricas, en la Figura 10 se observa que hay una diferencia considerable en el comportamiento del compuesto si h es variado. Se pueden comparar, por ejemplo, los resultados presentados en los casos (a), (b) y (d) de esa figura, donde $h = 2.1 r_i$, $h = 2.2 r_i$ and $h = 2.3 r_i$, respectivamente. La diferencia de comportamiento entre T_{zz} y ε_{zz} es grande (en particular para el caso (a) para T_{zz}). En la gráfica de ε_{zz} , observamos el salto en el valor de ese componente de la tensión a través de la interfaz entre la inclusión y la matriz circundante. En las Figuras 12, 14 notamos los valores elevados para T_{rr} y T_{zz} en la matriz, para la zona que conecta las dos inclusiones.

Finalmente, para el cilindro con cinco inclusiones, como en el caso anterior, en la Figura 15 notamos valores elevados para ε_{zz} para el material de matriz entre las inclusiones. También se observan valores elevados y variaciones rápidas para T_{zz} en la misma zona, especialmente para los casos (a), (b) y (c). De las Figuras 16-19 observamos los mismos valores elevados para los componentes de tensión y deformación en la zona cerca de las inclusiones.

5. Conclusiones finales

El presente artículo estudió el comportamiento de un compuesto que consiste en una matriz hiper-elástica con una, dos y cinco inclusiones esféricas que se modelan usando algunas clases relativamente nuevas de ecuaciones constitutivas, en las cuales, como un caso particular, tales inclusiones sufren pequeñas deformaciones independientemente de la magnitud de las tensiones. En varios de los trabajos previos discutidos en

la sección de introducción (ver, por ejemplo, [10, 17] y la referencia mencionada allí), la idea principal de estudiar ecuaciones constitutivas del tipo (10), (13), fue analizar el comportamiento de las soluciones para los problemas que muestran concentración de tensiones, donde desde el punto de vista físico, se espera que las deformaciones sean pequeñas. Este es el caso de cuerpos frágiles con grietas (ver la discusión en [14]). En el presente trabajo, este también ha sido el propósito. Aquí, se estudiaron los problemas que muestran la concentración de tensiones cerca del límite de las inclusiones. De los resultados presentados en la Sección 4, se observa que de hecho existe una concentración de tensiones, pero las deformaciones dentro de las inclusiones permanecen pequeñas. Los resultados presentados en este documento deben ser considerados como el resultado de una nueva forma de estudiar el problema de modelar el comportamiento de los materiales compuestos, donde hay una matriz blanda rellena con inclusiones relativamente rígidas y frágiles.

Agradecimientos

Los autores desean expresar su agradecimiento por el apoyo financiero brindado por FONDECYT (Chile) bajo la subvención no. 1120011. El trabajo de S. Montero también fue financiado por una beca para estudiantes de maestría proporcionada por CONICYT (Chile).

Referencias

- [1] K. R. Rajagopal, "On implicit constitutive theories," *Applications of Mathematics*, vol. 48, no. 4, pp. 279–319, 2003. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1023/A:1026062615145>
- [2] —, "The elasticity of elasticity," *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, vol. 58, no. 2, pp. 309–317, 2007. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s00033-006-6084-5>
- [3] K. Rajagopal and A. Srinivasa, "On the response of non-dissipative solids," *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 463, no. 2078, pp. 357–367, 2007. [Online]. Available: <https://dx.doi.org/10.1098/rspa.2006.1760>
- [4] C. Truesdell and W. Noll, *The non-linear field theories of mechanics*, 3rd ed., S. Antman, Ed. Springer Berlin Heidelberg, 2004. [Online]. Available: <https://goo.gl/t8UfwX>
- [5] K. R. Rajagopal and U. Saravanan, "Extension, inflation and circumferential shearing of an annular cylinder for a class of compressible elastic bodies," *Mathematics and Mechanics of Solids*,

- vol. 17, no. 5, pp. 473–499, 2012. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1177/1081286511423125>
- [6] R. Bustamante and K. R. Rajagopal, “A nonlinear model for describing the mechanical behaviour of rock,” *Acta Mechanica*, pp. 1–22, 2017. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s00707-017-1968-3>
- [7] P. A. Johnson and P. N. J. Rasolofosaon, “Manifestation of nonlinear elasticity in rock: Convincing evidence over large frequency and strain intervals from laboratory studies,” *Nonlinear Processes in Geophysics*, vol. 3, no. 2, pp. 77–88, 1996. [Online]. Available: <https://goo.gl/bnyjUK>
- [8] Z. Grasley, R. El-Helou, M. D’Ambrosia, D. Mokarem, C. Moen, and K. Rajagopal, “Model of infinitesimal nonlinear elastic response of concrete subjected to uniaxial compression,” *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 141, no. 7, p. 04015008, 2015. [Online]. Available: [https://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000938](https://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000938)
- [9] V. Kulvait, J. Málek, and K. R. Rajagopal, “Modeling gum metal and other newly developed titanium alloys within a new class of constitutive relations for elastic bodies,” *Archives of Mechanics*, vol. 69, no. 3, pp. 223–241, 2017. [Online]. Available: <https://goo.gl/qLkpQP>
- [10] —, “Anti-plane stress state of a plate with a v-notch for a new class of elastic solids,” *International Journal of Fracture*, vol. 179, no. 1–2, pp. 59–73, 2013. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s10704-012-9772-5>
- [11] M. L. Williams, “On the stress distribution at the base of a stationary crack,” *Journal of Applied Mechanics*, vol. 24, no. 1, pp. 109–114, 1956. [Online]. Available: <https://goo.gl/q9uZUn>
- [12] H. Zhu, A. Muliana, and K. Rajagopal, “On the nonlinear viscoelastic deformations of composites with prestressed inclusions,” *Composite Structures*, vol. 149, Supplement C, pp. 279–291, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.03.008>
- [13] C. Truesdell and R. Toupin, *The classical field theories*. Springer, Berlin, Heidelberg: Principles of Classical Mechanics and Field Theory / Prinzipien der Klassischen Mechanik und Feldtheorie. Encyclopedia of Physics / Handbuch der Physik, 1960, vol. 2/3/1, pp. 226–858. [Online]. Available: https://doi.org/10.1007/978-3-642-45943-6_2
- [14] K. R. Rajagopal, “On the nonlinear elastic response of bodies in the small strain range,” *Acta Mechanica*, vol. 225, no. 6, pp. 1545–1553, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s00707-013-1015-y>
- [15] R. Bustamante and K. R. Rajagopal, “A note on plane strain and plane stress problems for a new class of elastic bodies,” *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 15, no. 2, pp. 229–238, 2010. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1177/1081286508098178>
- [16] A. Ortiz-Bernardin, R. Bustamante, and K. Rajagopal, “A numerical study of elastic bodies that are described by constitutive equations that exhibit limited strains,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, no. 3, pp. 875–885, 2014. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.11.014>
- [17] S. Montero, R. Bustamante, and A. Ortiz-Bernardin, “A finite element analysis of some boundary value problems for a new type of constitutive relation for elastic bodies,” *Acta Mechanica*, vol. 227, no. 2, pp. 601–615, 2016. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1007/s00707-015-1480-6>